Skript

Exponentielles Wachstum und Differentialgleichungen

von

Georg Sahliger

Mainz, den 21.12.2020

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort

Wachstumsprozesse zu modellieren wurde in der Schule in Klasse 10 eingeführt. (Siehe Skript Exponential- und Logarithmusfunktion.)

Das folgende Skript ersetzt die allgemeine Basis a durch die Basis e = 2,71… und beschäftigt sich mit unterschiedlichen Formen des Wachstums (Beschränktes und logarithmisches Wachstum). Parallel werden Wachstumsprozesse anhand von Differentialgleichungen beschrieben.

1 Kurze Wiederholung des exponentiellen Wachstums

Exponentielles Wachstum zeichnet sich dadurch aus, dass es *immer schneller oder langsamer* wächst oder fällt.

Die allgemeine Formel lautet $y = b \cdot a^x$. Dabei ist b der Startwert und a der Wachstumsfaktor, der angibt, um wie viel y pro Zeiteinheit x fällt oder steigt.

Beispiel:

Jedes Jahr bekommt Fritz doppelt so viel Taschengeld wie im Vorjahr. Im Moment bekommt er 20 €. Stelle hierzu die Wachstumsformel auf!

Das Taschengeld steigt immer schneller, also handelt es sich um exponentielles Wachstum. Dabei ist 20€ der Startwert und in dem Wort „Doppelt“ steckt der Wachstumsfaktor 2.

Also: y = 20 · 2^x

Ähnlich ist auch die bekannte Legende nach der ein König einem Mann einen Wunsch erfüllen will, weil das das Schachspiel erfunden hat. Der Mann wünscht sich Reis und zwar nach folgender Vorschrift: Auf dem ersten Feld eines Schachbrettes liegt ein Reiskorn, auf dem zweiten 2, auf dem dritten 4,… Also auf jedem Feld das Doppelte des Vorfeldes.

Also y = 1 · 2^x

Der König wundert sich über die Bescheidenheit. Rechne einmal aus, wieviel Reiskörner auf dem 10, 20,…

Feld liegen.

Beispiele für exponentielles Wachstum:

- Ein Auto wird beim Beschleunigen immer schneller.
- Eine Population vermehrt sich immer schneller.
- Irgendetwas wächst oder fällt um den Faktor 3
- Jedes Jahr bekommt man auf dem Konto 3 % Zinsen

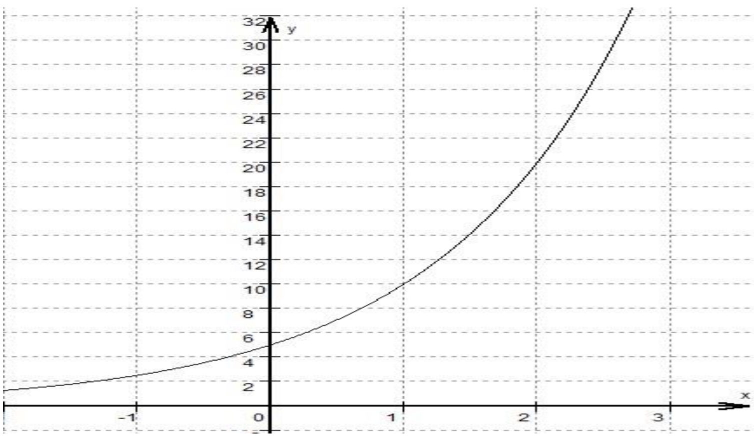
Die Wertetabelle bei exponentiellen Wachstum:

x	0	1	2	3
y	5	10	20	40

Jeder y-Wert verdoppelt sich. Wir haben also einen Anstieg um den Wachstumsfaktor 2. Will man eine Tabelle auf exponentielles Wachstum prüfen, teilt man immer den y Wert, der rechts danebenliegt durch den linken. Erhält man überall den gleichen Wachstumsfaktor, so ist das Wachstum exponentiell.

10 : 5 = 2 20 : 10 = 2 40 : 20 = 2 ➔ Es handelt sich um exponentielles Wachstum mit dem Anfangswert 5 und einem Wachstumsfaktor von 2.

Die Gleichung hierfür lautet also: y = 5 · 2^x und der Graph sieht hierzu folgendermaßen aus:



Dabei schneidet der Graph die y- Achse bei 5 (= der Anfangswert).

Beispiel: Eine Population von Insekten verdreifacht sich jeden Monat. Zu Beginn der Zählung waren es 10 Insekten. Nach 2 Monaten sind es 90 Insekten.

Hier ergeben sich 4 Aufgabentypen, wobei eine der obigen Angaben ausgerechnet werden soll:

Die Suche nach y:	Die Suche nach dem Startwert:	Die Suche nach dem Wachstumsfaktor:	Die Suche nach dem Zeitraum:
Frage: Wie viel Insekten sind es nach 2 Monaten?	**Frage:** Wie viele Insekten waren am Anfang?	**Frage:** Wie schnell oder mit welchem Wachstumsfaktor wächst eine Population, die innerhalb von 2 Monaten von 10 auf 90 Insekten ansteigt?	Frage: Wie lange dauert es bis die Anzahl der Insekten von 10 auf 90 Insekten gestiegen ist?
Lösung: Aufstellen des Funktionsterms $y = 10 \cdot 3^2 = 10 \cdot 9 = 90$. **Antwort**: Nach 2 Monaten sind es 90 Insekten.	**Lösung:** $90 = b \cdot 3^2$ $90 = b \cdot 9 \mid : 9$ $10 = b$ **Antwort**: An Anfang waren es 10 Insekten.	**Lösung:** $90 = 10 \cdot a^2 \mid :10$ $9 = a^2$ $\sqrt{9} = a$ $a = 3$ **Antwort:** Der Wachstumsfaktor beträgt 3.	**Lösung:** $9 = 10 \cdot 3^x \mid :10$ $9 = 3^x$ $log_3 9 = x$ $x = 2$ **Antwort**: Es dauert 2 Monate.

Besonderheiten beim Wachstumsfaktor, der in Prozent angegeben ist:

Aufgabe: Eine 1,2 m lange Alge vergrößert sich täglich um 30 %. Klar, dass die Alge immer schneller wächst und somit exponentielles Wachstum vorliegt. Aber wie gibt man die 30 % als Wachstumsfaktor an?

Die „Formel“ lautet: $x\% = 1 + \frac{x}{100}$ % , also $30\% = 1 + \frac{30}{100}$, also = 1,3.

Daher lautet die Formel: $y = 1,2 \cdot 1,3^x$

Weitere Beispiele: 50% ≙ 1,5 oder 60% ≙ 1,6 oder 100% ≙ 2

Für den Zerfall gilt folgendes:

Nimmt etwas um 10% ab, hat man einen Wachstumsfaktor 0,9 , also $y = c \cdot 0,9^x$

Beispiele: 20% ≙ 0,8 oder 30% ≙ 0,7

2 Exponentielles Wachstum mit der Basis e

Hat man als Basis nicht eine allgemeine Basis a, sondern e = 2,71…, so hat das oft Vorteile, da man nun die bekannten Eigenschaften der e-Funktion, z.B. einfaches Ableiten nutzen kann.

Jede Funktion mit der Basis a: $f(x) = b \cdot a^x$ (lässt sich in eine Funktion mit der Basis e f(x) = b · e $^{k \cdot x}$ umschreiben. Dabei gilt: k = ln a.

Dies lässt sich folgendermaßen zeigen:

Wir erinnern uns an folgende Gesetze: ln e = $log_e\, e$ = 1 und $log_b\, c^d = d \cdot log_b\, c$

$$a^x = e^{kx}$$

$$ln\, a^x = ln\, e^{kx}$$

$$x \cdot ln\, a = kx \cdot \ln e$$

$$x \cdot ln\, a = kx \cdot 1$$

$$x \cdot ln\, a = k \cdot x$$

Durch Vergleich der Faktoren erhält man:

ln a = k

Wir nutzen den Vergleich der Faktoren, da wir nicht durch x, das evtl. auch 0 sein könnte, teilen wollen.

Beispiel:

Schreibe die Funktion $f(x) = 2^x$ mit der Basis e:

Antwort: f(x) = $e^{\ln 2 \cdot x}$ f(x) = $e^{0{,}69 \cdot x}$

Schreibe die Funktion $f(x) = 10 \cdot 2^x$ mit der Basis e:

Antwort: f(x) = $10 \cdot e^{\ln 2x}$ f(x) = 10 · $e^{0{,}69x}$

Beispiel: Eine Population von Insekten verdreifacht sich jeden Monat. Zu Beginn der Zählung waren es 10 Insekten. Nach 2 Monaten sind es 90 Insekten.

Wie oben ergibt sich folgende Funktionsvorschrift: $f(x) = 10 \cdot 3^2$. Rechnen wir diese in eine Funktion mit der Basis e um: Mit $k = \ln a$, also $k = \ln 3$ gilt: $f(x) = 10 \cdot e^{\ln 3 \cdot x}$

Gerundet: $f(x) = 10 \cdot e^{1,1 \cdot x}$

Hier ergeben sich nun wieder unsere 4 Aufgabentypen mit einer leichten Variation:

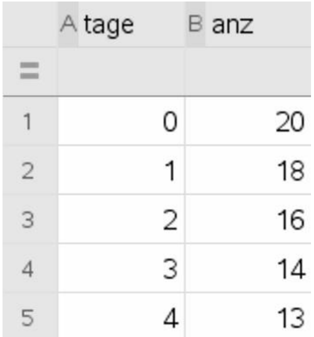
Die Suche nach y:	Die Suche nach dem Startwert:	Die Suche nach dem Wachstumsfaktor:	Die Suche nach dem Zeitraum:
Frage: Wie viel Insekten sind es nach 2 Monaten? **Lösung:** Aufstellen des Funktionsterms $f(x) = 10 \cdot e^{1,1 \cdot x}$ $f(x) = 10 \cdot e^{1,1 \cdot 2}$ $= 10 \cdot e^{2,2} = 10 \cdot 9 = 90.$ **Antwort**: Nach 2 Monaten sind es 90 Insekten.	**Frage:** Wie viele Insekten waren am Anfang? **Lösung:** $90 = b \cdot 3^2$ $90 = b \cdot e^{1,1 \cdot 2}$ $90 = b \cdot e^{2,2,}$ $90 = b \cdot 9 \mid : 9$ $10 = b$ **Antwort**: An Anfang waren es 10 Insekten.	**Frage:** Wie schnell oder mit welchem Wachstumsfaktor wächst eine Population, die innerhalb von 2 Monaten von 10 auf 90 Insekten ansteigt? **Lösung:** $90 = 10 \cdot a^{2,2} \mid :10$ $9 = a^{2,2}$ $9^{\frac{1}{2,2}} = a$ $a = 2,71 \approx e$ **Antwort:** Klar: Der Wachstumsfaktor beträgt e.	Frage: Wie lange dauert es bis die Anzahl der Insekten von 10 auf 90 Insekten gestiegen ist? **Lösung:** $90 = 10 \cdot e^{1,1 \cdot x} \mid :10$ $9 = e^{1,1 \cdot x}$ $log_e 9 = 1,1 \cdot x$ $\ln 9 :1,1 = x$ $x = 1,997 = 2$ **Antwort**: Es dauert 2 Monate.

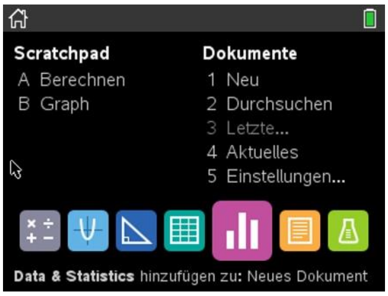
3 Wachstumskonstanten bestimmen

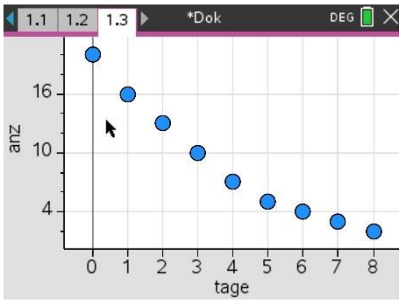
Hat man folgende Tabelle gegeben und weiß man, dass es sich um exponentielles Wachstum handelt, kann man dies auf unterschiedliche Art machen.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	20	16	13	10	7	5	4	3	2

Mit Hilfe der Regression:





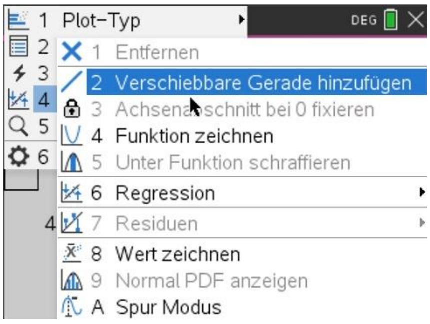


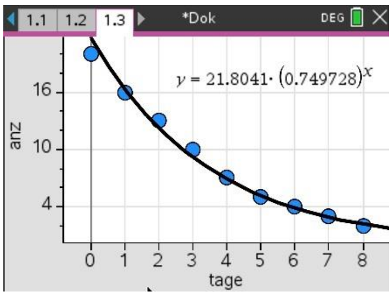
Daten in die Tabelle übernehmen

Und Spalten benennen.

Bei Data Statistics auswählen

Achsen benennen





Bei Menu aus analysieren gehen

und „Regression“ auswählen.

Nun ergibt sich folgende gerundete Funktionsgleichung

$f(x) = 20 \cdot 0{,}75^x$

Die Wachstumskonstante a = 0,75 muss man nun wieder umrechnen:

$f(x) = 20 \cdot e^{\ln(0.75)x}$ $f(x) = 20 \cdot e^{-0{,}29x}$

Am negativen k erkennt man, dass es sich um negatives Wachstum handelt. Die y-Werte werden immer kleiner bzw. nehmen ab.

Bei der zweiten Methode vergleicht man die Quotienten und berechnet hier den Mittelwert.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	20	16	13	10	7	5	4	3	2
$\frac{y_{n+1}}{y_n}$		$\frac{16}{20} = 0{,}8$	$\frac{13}{16} = 0{,}81$	0,76	0,7	0,71	0,8	0.75	0,66

Berechnen wir den Mittelwert erhalten wir ca. 0,748. Will man wieder die Basis e, berechnet man wie gerade eben das k.

Man kann das k auch direkt berechnen, indem man ein Wertepaar in die e-Funktion einsetzt.

$$16 = 20 \cdot e^{k \cdot 1}$$

$$\frac{16}{20} = e^k$$

$$0{,}8 = e^k$$

$$ln\, 0{,}8 = ln\, e^k$$

$$\ln 0{,}8 = k \cdot \ln e$$

$$ln 0{,}8 = k \cdot 1$$

$$-0{,}22 = k$$

Auch hier arbeitet man wieder mit gerundeten Werten. Ein anders Zahlenpaar bzw. ein anderer Startwert hätte auch einen anderen Wert für k ergeben.

4 Halbwertszeit und Verdopplungszeit.

Aus der Mittelstufe ist bekannt, dass die Halbwertszeit den Zeitpunkt beschreibt, an dem nur noch die Hälfte eines radioaktiven Stoffes, einer Population oder ähnliches vorhanden ist.

Nehmen wir wieder die Gleichung: $f(x) = 20 \cdot e^{-0{,}29x}$

Ansatz: $10 = 20 \cdot e^{-0{,}29x}$ Wir setzen also die Hälfte von b für y ein.

$$\frac{10}{20} = e^{-0{,}29x}$$

$$0{,}5 = e^{-0{,}29x}$$

Diese Gleichung lösen wir wie oben.

Somit erhält man x = 2,39. Hier muss man immer aufrunden und erhält, dass nach 3 Zeiteinheiten nur noch die Hälfte des Stoffes vorhanden ist.

Diesen Ansatz hätte man auch direkt hinschreiben können. Will man wissen, wann nur noch $\frac{2}{3}$ eines Stoffes vorhanden ist, kann an direkt schreiben:

$\frac{2}{3} = e^{-0,29x}$.

Analog berechnet man die Verdopplungszeit.

In einer Stadt ist in den letzten 20 Jahren die Einwohnerzahl von 2,345 Millionen auf 3,2123 Millionen gestiegen. Wann würde sie sich verdoppeln?

Wir berechnen zunächst die Funktionsgleichung:

$$3{,}2123 = 2{,}345 \cdot e^{k \cdot 20}$$

$$\frac{3{,}2123}{2{,}345} = e^{20k}$$

$$1{,}37 = e^{20k}$$

$$ln\, 1{,}37 = ln\, e^{20k}$$

$$\ln 1{,}37 = 20k \cdot \ln e$$

$$ln 1{,}37 = 20k \cdot 1$$

$$0{,}31492 = 20k \;|:20$$

$$k = 0{,}016$$

Dies ergibt folgende Funktionsgleichung: $f(x) = 2{,}345 \cdot e^{0{,}016 \cdot x}$

Berechnen wir die Verdopplungszeit: $2{,}345 \cdot e^{0{,}016 \cdot x} = 2.$

Zur Übung kann das jeder selbst ausrechnen.

Man erhält x = 4,33 und aufgerundet: Nach 5 Jahren hat sich die Bevölkerung verdoppelt.

5 Differentialgleichungen bei Wachstumsprozessen

Wir leiten folgende Funktion mit der Kettenregel ab:

$f(x) = e^{0,1x}$ $\quad$ f´ (x) = 0,1 $e^{0,1x}$

$f(x) = 5 \cdot e^{0,1x}$ $\quad$ $f´(x) = 0,1 \cdot 5 \cdot e^{0,1x}$

$f(x) = c \cdot e^{kx}$ $\quad$ $f´(x) = k \cdot c \cdot e^{kx}$ $\quad$ bzw. $f´(x) = k \cdot f(x)$

Hiermit haben wir eine Gleichung erhalten, die einen Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung an jeder Stelle x herstellt. Es gilt: $f´(x) = k \cdot f(x)$ Man erkennt, dass die momentane Änderungsrate f´(x) proportional zur Funktion f(x) und zwar um den Faktor k ist.

Solche Gleichungen nennt man **Differentialgleichungen.** Die Lösung einer solchen Gleichung ist kein Wert, sondern eine Funktion.
Differentialgleichungen sind ein wichtiges Werkzeug in der Mathematik und in vielen Bereichen der Wissenschaft und Technik. Sie werden verwendet, um Beziehungen zwischen einer oder mehreren unbekannten Funktionen und deren Ableitungen zu beschreiben. Hier soll es genügen, die DGL zu lösen, indem man alle Funktionen findet, welche eine DGL lösen. Ergänzend kann man auch noch von den vielen Lösungen bestimmte Funktionen berechnen.

Beispiel: Gegeben ist die DGL f ´(x) = 0,2· $f(x)$.

a) Gib alle Funktionen an, die Lösung der DGL sind.
b) Welche der gefundenen Lösungen erfüllt die Bedingung f(5) = 6?

Lösung:

a) Die passende Funktion lautet f$(x) = c \cdot e^{kx}$ Den Wert für k = 0,2 können wir direkt ablesen und so ergibt sich folgende Funktion: $f(x) = c \cdot e^{0,2x}$. Je nach Anfangswert c ergeben sich verschiedene Funktionen als Lösung für die Gleichung.
b) Nun suchen wir eine bestimmte Funktion, welche auch die Bedingung f(5) = 6 erfüllt. Diese finden wir durch Einsetzen:

$$6 = c \cdot e^{0,2\cdot 5}$$
$$6 = c \cdot e^{1}$$
$$6 = c \cdot e$$
$$c = \frac{6}{e}$$

$$f(x) = \frac{6}{e} \cdot e^{0,2x}$$

Bzw.

$$f(x) = 2,2 \cdot e^{0,2x}$$

Aufgabe: Gegeben ist die DGL f ´(x) = -0,1· $f(x)$.

a) Gib alle Funktionen an, die Lösung der DGL sind.
b) Welche der gefundenen Lösungen erfüllt die Bedingung f(0) = 4?

Lösung:

a) Die passende Funktion lautet $\text{f}(x) = c \cdot e^{-0,1x}$

b) f(0) = 4 einsetzen: $4 = c \cdot e^{-0,1 \cdot 0}$

$4 = c \cdot e^{0}$
$4 = c \cdot 1$
$c = 4$
$f(x) = 4 \cdot e^{-0,1x}$

Aufgabe.

Das folgende Schaubild zeigt die Anzahl der Neuerkrankungen pro Tag während der Corona Pandemie im Jahre 2020.

Jeder Tag zeigt die seit dem Vortag gemeldeten neuen Fälle · Vor weniger als vor 2 Tagen aktualisiert · Quelle: JHU CSSE COVID-19 Data · Informationen zu diesen Daten

Einheit	Datum	Anzahl	Einheit	Datum	Anzahl
0	20.7.2020	?	6	20.9.2020	2321
1	1.8.2020	606	7	30.9.2020	2442
2	10.8.2020	1220	8	10.10.2020	2968
3	20.8.2020	1586	9	20.10.2020	8523
4	30.8.2020	1568	10	30.10.2020	19382
5	10.9.2020	1716	11	10.11.2020	26547

Eine Einheit ca. 10 Tage. Sollte dieser Tag auf einen Sonntag fallen und die Werte aufgrund fehlender Testung geringer ausfallen, wurde ein andere Tag genommen.

Aufgabe:

a) Erstelle auf alle 3 Arten die Formel und vergleiche.
b) Bestimme den Startwert bei Einheit 0 für x.
c) Wie hoch waren die Neuinfektionen 20 Tage davor? Einheit: -2
d) Wie hoch waren rein rechnerisch die Anzahl der Neuinfektionen am 20.11.2020?
e) Wann wäre die 40000 Marke erreicht worden, wenn man nicht die Maskenpflicht und weitere Beschränkungen verschärft hätte?
f) Erstelle die zugehörige Differentialgleichung. Welche Gleichung/Funktion erfüllt die Bedingung des f(4) = 1568

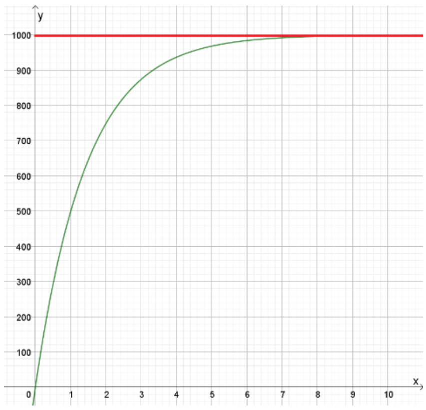
6 Begrenztes Wachstum

Bisher haben wir uns unbeschränktes Wachstum angesehen. Hier kann der y Wert theoretisch bin ins Unendliche steigen. In der Praxis ist aber Wachstum oft begrenzt. Eine Population kann sich nicht unbegrenzt ausbreiten, da Nahrung und Platz begrenzt sind. Ebenso können sich bei einer Pandemie nicht mehr Menschen als vorhanden sind, anstecken.

Begrenztes Wachstum mit der Schranke S lässt sich mithilfe der folgenden Formeln ausdrücken:

$f(x) = S – c \cdot a^x$ bzw. $f(x) = S - c \cdot e^{-kx}$ Dabei gilt: $c = S – f(0)$ und $k = - \ln(a)$ mit $0 < a < 1$.

Beispiel. Hans startet eine Weihnachtskartenaktion an seiner Schule. Jeder Schüler soll zwei weiteren Schülern eine Karte schreiben. Die Schule hat 1000 Schüler. Stelle den Sachverhalt in einer Funktion dar und zeichne den Graph.



Lösung:

$f(x) = S - c \cdot a^x$

Zunächst müssen wir c bestimmen:

$f(x) = S - c \cdot a^x$ => $f(x) = 1000 - c \cdot 2^x$

Klar, da es mit einem Schüler startet, gilt f(0) = 1, also

$f(0) = 1000 - c \cdot 2^0 = 1$ => $1000 - c = 1$ => $-c = -999$ => $c = 999$

Mit $k = - \ln a$ gilt: $k = - \ln(2) = -0{,}69$

bzw. $f(x) = 1000 - 999 \cdot e^{-0{,}69x}$

Man erkennt gut, wie der „Restbestand“ zwischen der Schranke und dem jeweiligen y-Wert exponentiell abnimmt.

7 Wachstumskonstante für begrenztes Wachstum bestimmen

Gegeben ist folgende Funktion $f(x) = 10 - 9 \cdot e^{-0{,}2x}$

Damit ergibt sich folgende Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	2,63	3,97	5	5,95	6,7	7,28	7,78	8,18

Will man hier die Wachstumskonstante bestimmen muss man den Restbestand, also den Abstand zwischen Schranke und y Wert untersuchen. Dieser nimmt ja exponentiell ab, da sich die Funktin exponentiell an die Schranke annähert.

Der Wert der Schranke kann man wie hier nicht immer aus der Tabellen heraus erkennen. Aber von der Funktion wissen wir, dass die Schranke bei 10 liegt.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	2,63	3,97	5	5,95	6,7	7,28	7,78	8,18
10 - y	9	7,37	6,03	5	4,05	3,3	2,72	2,22	1,82
$\frac{10-y_{n+1}}{10-y_n}$		0,81	0,81	0,82	0,81	0,81	0,81	0,82	0,81

Danit ergibt sich eine Wachstumskonstante von a = 0,81. Klar, der Restbestand wird kleiner, daher gilt a < 1.

Möchte man von der Tabelle wieder zur Funktion, muss man k berechnen:

Mit k = - ln(a) ergibt sich k = -(-0,20) = +0,20.

Achtung beim Einsetzen in die Formel muss man -k einsetzen: $f(x) = 10 - 9 \cdot e^{-0,2x}$.

Betrachten wir noch einmal das Vorzeichen bei k zum Vergleich:

Unbeschränktes Wachstum: $f(x) = f(0) - c \cdot e^{+kx}$

Beschränktes Wachstum: $f(x) = S - c \cdot e^{-kx}$

Aufgabe:

In einem Wildreservat können maximial 2000 Antilopen leben. Jedes Jahr wird der Wildbestand gezählt.

Zu Beginn wurden 500 Tiere gezählt, 10 Jahre später schon 800.

a) Beschreibe den Sachverhalt mit einer Funktion.
b) Wie groß wird die Herde in 100 Jahren sein? Wie groß war sie vor 10 Jahren?
c) Wann hat die Herde die Anzahl von 1500 Tieren erreicht?
d) Wann beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit etwa 10 Tiere pro Jahr?

Zu a) Da es sich um beschränktes Wachstum handelt, gilt allgemein: $f(x) = S - c \cdot e^{-kx}$

S = 2000

c bestimmen: Mit f(0) = 500 gilt: 2000 – c = 500 => c = 1500

k bestimmen: Mit f(10) = 800 gilt: $2000 - 1500 \cdot e^{-k\cdot 10} = 800$ | -2000

$-1500 \cdot e^{-k\cdot 10} = -1200$ | :(-1500)

$$e^{-k\cdot 10} = \frac{4}{5}$$

$\ln e^{-k\cdot 10} = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$

$$-\mathrm{k} \cdot 10 \cdot \ln e = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$-k \cdot 10 = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$k = 0{,}0223$$

Damit ergibt sich folgende Gleichung von f: f(x) = $2000 - 1500 \cdot e^{-0{,}0223x}$

Zu b)

Größe der Population in 100 Jahren: f(100) = $2000 - 1500 \cdot e^{-0{,}0223\cdot 100}$ = 1840 Tiere.

Größe der Population vor 10 Jahren: f(-10) = $2000 - 1500 \cdot e^{-0{,}0223\cdot(-10)}$ = 125 Tiere.

Zu c)

a) Ansatz: $2000 - 1500 \cdot e^{-0{,}0223\cdot x} = 1500$

$x = \frac{\ln(3)}{0{,}00223}$ = 49,27

Geben Sie hier eine Formel ein.

Geben Sie hier eine Formel ein.

Nach 50 Jahren

b)

$$\ln(\quad e^{-k\cdot 10}\quad) \qquad = ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

Aufgabe: Begrenztes Wachstum, das sich von oben an eine Schranke annähert.

Zeichne das Schaubild der folgenden Funktion: $f(x) = 100 - 400 \cdot e^{-0,6x}$.

8 Differentialgleichungen für beschränktes Wachstum

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 10 - 6 \cdot e^{-0,2x}$ Gib die zugehörige Differentialgleichung an.

Zunächst bauchen wir wieder die Ableitung:

$f'(x) = -0,2 \cdot (-6) \cdot e^{-0,2x}$ => $f'(x) = 1,2 \cdot e^{-0,2x}$

Vergleichen wir die beiden Funktionen: $f'(x) = 1,2 \cdot e^{-0,2x}$ und $f(x) = 10 - 6 \cdot e^{-0,2x}$

Wir lösen f(x) nach $e^{-0,2x}$ auf:

$f(x) = 10 - 6 \cdot e^{-0,2x}$| -10

f (x) – 10 = - 6 · $e^{-0,2x}$ |:(-6)

(f(x) – 10) : (-6) = $e^{-0,2x}$

Dies in $f'(x) = 1,2 \cdot e^{-0,2x}$ eingesetzt:

$f'(x) = 1,2 \cdot (\text{f(x)} - 10) : (-6)$

$f'(x) = -0,2 \cdot (\text{f(x)} - 10)$

$f'(x) = -0,2 \cdot (-10 + \text{f(x)})$ Damit die Schranke wieder positiv ist, verrechnen wir das Minus.

$f'(x) = 0,2 \cdot (+10 - \text{f(x)})$

Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 100 - 100 \cdot e^{-0,1x}$ Gib die zugehörige Differentialgleichung an.

Zunächst bauchen wir wieder die Ableitung $f'(x) = -0,1 \ \cdot (-100) \cdot e^{-0,1x}$

$f'(x) = -0,1 \ \cdot (-100) \cdot e^{-0,1x}$ => $f'(x) = 10 \cdot e^{-0,1x}$

Vergleichen wir die beiden Funkionen: $f'(x) = 10 \cdot e^{-0,1x}$ und $f(x) = 100 - 100 \cdot e^{-0,1x}$

Wir lösen f(x) nach $e^{-0,1x}$ auf:

$f(x) = 100 - 100 \cdot e^{-0,1x}$| -10

f(x) – 100 = - 100 · $e^{-0,1x}$ |:(-6)

(f(x) – 100) : (-100) = $e^{-0,1x}$

Dies in $f'(x) = 10 \cdot e^{-0,1x}$ eingesetzt:

$f'(x) = 10 \cdot (\text{f(x)} - 100) : (-100)$

$f'(x) = -0,1 \cdot (\text{f(x)} - 100)$

$f'(x) = -0,1 \cdot (-100 + \text{f(x)})$ Damit die Schranke wieder positiv ist, verrechnen wir das Minus.

$f'(x) = 0,1 \cdot \left(+100 - \text{f(x)}\right)$

Allgemein können wir wieder formulieren:

Man kann begrenztes Wachstum durch die Differentialgleichung: $f'(x) = k \cdot \left(\text{S} - \text{f(x)}\right)$ beschreiben:

Aufgabe:

Beschreibe durch die Differentialgleichung folgende Funktion $f(x) = 100 - 30 \cdot e^{-0,1x}$.

Eingesetzt gilt: $f'(x) = +0,1 \cdot \left(100 - \text{f(x)}\right)$.

Hier gilt wieder, dass unendlich viele Gleichungen die Funktion lösen. Wählen wir daher eine konkrete Funktion aus:

Eine konkrete Lösung wäre z.B. $f(0) = 100 - 30 \cdot e^{-0,1 \cdot 0}, also$

f(0) = 70

Aufgabe: Gib die Lösung der folgenden DGL an: $f'(x) = +0{,}1 \cdot \left(5 - \text{f(x)}\right)\ mit\ f(0) = 0$.

f(x) = 5- (c $\cdot\ e^{-0{,}1 \cdot x}$)   Mit f(0) = 0 gilt:

0 = 5 – c $\cdot\ e^{-0{,}1 \cdot 0}$

0 = 5 – c · 1

-5 = - c

c = 5

Also insgesamt: $f(x) = 5\ - 5 \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$.

Die Schranke liegt also bei 5 und die Funktion nähert sich von unten an. Anders würde es sich um folgende Bedingung handeln: $f(0) = 10$

10 = 5 – c $\cdot\ e^{-0{,}1 \cdot 0}$

10 = 5 – c · 1

5 = - c

c = -5

Eingesetzt in die Funktion:

$f(x) = 5\ - (-5) \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$

$f(x) = 5 + 5 \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$

Hier ist die Schranke auch 5 und wir nähern uns von oben.

Aufgaben aus der Praxis:

In ein Staubecken laufen pro Minute 90 Liter rein. 6% werden wieder herausgelassen.

a) Stelle eine Differentialgleichung auf, die beschreibt, wie viel Wasser sich zu jeder Zeit im Becken befindet.
b) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung.
c) Wie groß ist die momentane Zuwachsrate, wenn sich 1000 Liter im Staubecken befinden.

a) Antwort:

Wir stellen erst einmal den allgemeinen Ansatz auf:

$$f'(x) = 90 - 0{,}06 \cdot \text{f(x)}$$

Unser Ziel lautet: $f'(x) = 0{,}06 \cdot \big(\mathrm{S} - \mathrm{f(x)}\big)$

Berechen von S:

Wir klammern 0,06 bei $f'(x) = 90 - 0{,}06 \cdot \mathrm{f(x)}$ aus:

$f'(x) = 0{,}06 \cdot (\frac{90}{0{,}06} - \mathrm{f(x)})$ => $f'(x) = 0{,}06 \cdot (1500 - \mathrm{f(x)})$

b) Wir suchen also das f(x), welches die Gleichung löst: $f'(x) = 0{,}06 \cdot \big(1500 - \mathrm{f(x)}\big)$
   Wir übernehmen k und S: $f(x) = 1500 - c \cdot e^{-0{,}06x}$
   c berechnen wir mit f(0) = 0.

$0 = 1500 - c \cdot e^{-0{,}06 \cdot 0}$

$0 = 1500 - c \cdot 1$

-c = -1500

c = 1500

Somit ergibt sich folgende Lösung: $f(x) = 1500 - 1500 \cdot e^{-0{,}06x}$

c) Um zu bestimmen, wie groß die Zuwachsrate ist, wenn sich 1000 Liter im Becken befinden, muss gelten: f(0) = 1000 und $f'(x) = 90 - 0{,}06 \cdot \mathrm{f(x)}$

$$f'(x) = 90 - 0{,}06 \cdot 1000$$

$$f'(x) = 90 - 60 = 30$$

Da gilt $f(x) = 1500 - 1500 \cdot e^{-0{,}06x}$ folgt: $f'(x) = 90 \cdot e^{-0{,}06x}$

Dies führt zu folgendem Ansatz: $90 \cdot e^{-0{,}06x} = 30$

$$e^{-0{,}06x} = \frac{30}{90}$$

$$e^{-0{,}06x} = \frac{1}{3}$$

Eingegeben in den GTR oder wie oben ausführlich berechnet, ergibt: x = 18,3. Nach 18 Minuten beträgt die Zuanhmrate 30 Liter pro Minute.

Aufgabe 2:

Von einem Medikament gelangen pro Minute 3 ml. Die momentane Ausscheidungsrate beträgt 4% des gerade vorhanden Medikaments.

a) Stelle eine Differentialgleichung auf, die beschreibt, welche Menge des Medikaments zu jedem Zeitpunkt vorhanden ist.

d) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung.
e) Wie groß ist die momentane Zuwachsrate, wenn sich 50 ml des Medikaments im Blut befinden.

Zu a)

Wir stellen erst einmal den allgemeinen Ansatz auf:

$$f'(x) = 3 - 0{,}04 \cdot \mathrm{f(x)}$$

Unser Ziel lautet: $f'(x) = 0{,}04 \cdot \left(\mathrm{S} - \mathrm{f(x)}\right)$

Berechen von S:

Wir klammern 0,06 bei $f'(x) = 3 - 0{,}04 \cdot \mathrm{f(x)}$ aus:

$f'(x) = 0{,}04 \cdot \left(\frac{3}{0{,}04} - \mathrm{f(x)}\right)$ => $f'(x) = 0{,}04 \cdot (75 - \mathrm{f(x)})$

d) Wir suchen also das f(x), welches die Gleichung löst: $f'(x) = 0{,}04 \cdot \left(75 - \mathrm{f(x)}\right)$
Wir übernehmen k und S: $f(x) = 75 - c \cdot e^{-0{,}04x}$
c berechnen wir mit f(0) = 0.

$0 = 75 - c \cdot e^{-0{,}04 \cdot 0}$

$0 = 75 - c \cdot 1$

-c = -75

c = 75

Somit ergibt sich folgende Lösung: $f(x) = 75 - 75 \cdot e^{-0{,}04x}$

e) Um zu bestimmen, wie groß die Zuwachsrate ist, wenn sich 50 ml des Medikaments im Blut befinden, muss gelten: f(0) = 50 und $f'(x) = 3 - 0{,}04 \cdot \mathrm{f(x)}$

$$f'(x) = 3 - 0{,}04 \cdot 50$$

$$f'(x) = 3 - 2 = 1$$

Da gilt $f(x) = 75 - 75 \cdot e^{-0{,}04x}$ folgt: $f'(x) = 3 \cdot e^{-0{,}04x}$

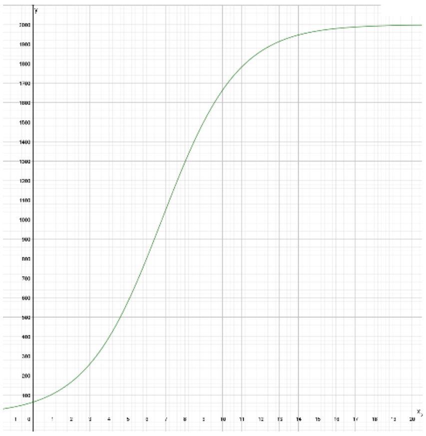
Dies führt zu folgendem Ansatz: $3 \cdot e^{-0{,}04x} = 1$

$$e^{-0{,}04x} = \frac{1}{3}$$

Eingegeben in den GTR oder wie oben ausführlich berechnet, ergibt: x = 27,5. Nach 27 Minuten beträgt die Zuanhmrate 50 ml pro Minute.

9 Logistisches Wachstum

Eine Pandemie verläuft, sofern sie sich ungebremst entwickeln kann, zunächnächst langsam an und entwickelt sich exponential, da es nur wenig Kranke gibt. Dann kommt es zu einer fast proportinalen Ansteckung und in Phase 3 wird die Ausbreitung wieder begrenzt. Der nebenstehende Funktionsgraph soll dies zeigen:



Die solche Wachstumsvorgänge bezeichnet man also logistisches Wachstum und wird mit folgender Gleichung beschrieben:

f(x) = $f(x) = \frac{2000}{1+30 \cdot e^{-0.5x}}$

Allgemein ausgedrückt:

f(x) = $f(x) = \frac{S}{1+a \cdot e^{-kx}}$

Die zugehörige Differentialgleichung lautet: $f'(x) = r \cdot f(x) \cdot \left(S - \mathrm{f(x)}\right)\ mit\ k = r \cdot S\ und\ r < 0$